La programmation linéaire : une introduction

- Qu'est-ce qu'un programme linéaire ?
- Exemples :
  - allocation de ressources
  - problème de recouvrement
- Hypothèses de la programmation linéaire
- Pourquoi étudier la programmation linéaire ?
- Interprétation géométrique : représentation et résolution graphique

Qu'est-ce qu'un programme linéaire ?

Un **programme linéaire** (PL) est un problème d'optimisation consistant à maximiser (ou minimiser) une fonction objectif linéaire de n variables de décision soumises à un ensemble de contraintes exprimées sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires.

Qu'est-ce qu'un programme linéaire ?

Un **programme linéaire** (PL) est un problème d'optimisation consistant à maximiser (ou minimiser) une fonction objectif linéaire de n variables de décision soumises à un ensemble de contraintes exprimées sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires.

À l'origine, le terme programme a le sens de planification opérationnelle mais il est aujourd'hui employé comme synomyme de problème (d'optimisation).

La terminologie est due à G. B. Dantzig, inventeur de l'algorithme du simplexe (1947).

Forme générale d'un programme linéaire

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Max (Min)} \quad z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{s.c.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & i \in I \subseteq \{1, \ldots, m\} \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j & \geq & b_k & k \in K \subseteq \{1, \ldots, m\} \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j & = & b_r & r \in R \subseteq \{1, \ldots, m\} \\
& \quad l_j \leq x_j \leq u_j & & & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Les ensembles I, K, et R sont disjoints, $I \cup K \cup R = \{1, \ldots, m\}$ et $l_j = -\infty$ et $u_j = +\infty$ sont des valeurs possibles.

Forme générale d'un programme linéaire

$$
\begin{array}{llrcll}
\text{Max (Min)} & z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{s.c.} & & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & i \in I \subseteq \{1, \ldots, m\} \\
 & & \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j & \geq & b_k & k \in K \subseteq \{1, \ldots, m\} \\
 & & \sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j & = & b_r & r \in R \subseteq \{1, \ldots, m\} \\
 & & & l_j \leq x_j \leq u_j & & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Les ensembles I, K, et R sont disjoints, $I \cup K \cup R = \{1, \ldots, m\}$ et $l_j = -\infty$ et $u_j = +\infty$ sont des valeurs possibles.

Terminologie

- Les variables $x_1, \ldots, x_n$ sont appelées **variables de décision** du problème.
- La fonction linéaire à optimiser est appelée **fonction objectif** (ou parfois fonction objet).
- Les **contraintes** prennent la forme d'équations et d'inéquations linéaires.
- Les **contraintes de bornes** se résument souvent à des contraintes de non-négativité $x_i \geq 0$. Elles sont généralement traîtées de manière spéciale par les algorithmes de résolution.

Terminologie

- Les variables $x_1, \dots, x_n$ sont appelées **variables de décision** du problème.
- La fonction linéaire à optimiser est appelée **fonction objectif** (ou parfois fonction objet).
- Les **contraintes** prennent la forme d'équations et d'inéquations linéaires.
- Les **contraintes de bornes** se résument souvent à des contraintes de non-négativité $x_i \geq 0$. Elles sont généralement traîtées de manière spéciale par les algorithmes de résolution.

Terminologie

- Les variables $x_1, \ldots, x_n$ sont appelées **variables de décision** du problème.
- La fonction linéaire à optimiser est appelée **fonction objectif** (ou parfois fonction objet).
- Les **contraintes** prennent la forme d'équations et d'inéquations linéaires.
- Les **contraintes de bornes** se résument souvent à des contraintes de non-négativité $x_i \geq 0$. Elles sont généralement traîtées de manière spéciale par les algorithmes de résolution.

Terminologie

- Les variables $x_1, \ldots, x_n$ sont appelées **variables de décision** du problème.

- La fonction linéaire à optimiser est appelée **fonction objectif** (ou parfois fonction objet).

- Les **contraintes** prennent la forme d'équations et d'inéquations linéaires.

- Les **contraintes de bornes** se résument souvent à des contraintes de non-négativité $x_i \geq 0$. Elles sont généralement traîtées de manière spéciale par les algorithmes de résolution.

Exemple : problème d'allocation de ressources

Vous disposez de

- 8 kg de pommes,
- 2.5 kg de pâte,
- 6 plaques.

pour confectionner des chaussons et des tartes.

Pour faire un chausson, il vous faut 150 g de pommes et 75 g de pâte. Chaque chausson est vendu 3 frs.

Pour faire une tarte, il vous faut 1 kg de pommes, 200 g de pâte et 1 plaque. Chaque tarte est divisée en 6 parts vendues chacune 2 frs.

Que faut-il cuisiner pour maximiser le chiffre d'affaires de la vente ?

Exemple : problème d'allocation de ressources

Vous disposez de

- 8 kg de pommes,
- 2.5 kg de pâte,
- 6 plaques.

pour confectionner des chaussons et des tartes.

Pour faire un chausson, il vous faut 150 g de pommes et 75 g de pâte. Chaque chausson est vendu 3 frs.

Pour faire une tarte, il vous faut 1 kg de pommes, 200 g de pâte et 1 plaque. Chaque tarte est divisée en 6 parts vendues chacune 2 frs.

Que faut-il cuisiner pour maximiser le chiffre d'affaires de la vente ?

Exemple : problème d'allocation de ressources

Vous disposez de

- 8 kg de pommes,
- 2.5 kg de pâte,
- 6 plaques.

pour confectionner des chaussons et des tartes.

Pour faire un chausson, il vous faut 150 g de pommes et 75 g de pâte. Chaque chausson est vendu 3 frs.

Pour faire une tarte, il vous faut 1 kg de pommes, 200 g de pâte et 1 plaque. Chaque tarte est divisée en 6 parts vendues chacune 2 frs.

Que faut-il cuisiner pour maximiser le chiffre d'affaires de la vente ?

Définissons 2 **variables de décision**

x_1 : le nombre de chaussons confectionnés,

x_2 : le nombre de tartes confectionnées.

Définissons 2 **variables de décision**

x_1 : le nombre de chaussons confectionnés,

x_2 : le nombre de tartes confectionnées.

Le chiffre d'affaires associé à une production (x_1, x_2) est

$$z = 3x_1 + (6 \times 2)x_2 = 3x_1 + 12x_2.$$

Définissons 2 **variables de décision**

x_1 : le nombre de chaussons confectionnés,

x_2 : le nombre de tartes confectionnées.

Le chiffre d'affaires associé à une production (x_1, x_2) est

$$z = 3x_1 + (6 \times 2)x_2 = 3x_1 + 12x_2.$$

Il ne faut pas utiliser plus de ressources que disponibles

$$150x_1 \quad + \quad 1000x_2 \quad \leq \quad 8000 \quad \text{(pommes)},$$

Définissons 2 **variables de décision**

x_1 : le nombre de chaussons confectionnés,

x_2 : le nombre de tartes confectionnées.

Le chiffre d'affaires associé à une production (x_1, x_2) est

$$z = 3x_1 + (6 \times 2)x_2 = 3x_1 + 12x_2.$$

Il ne faut pas utiliser plus de ressources que disponibles

$$\begin{array}{rcrcrl} 150x_1 & + & 1000x_2 & \leq & 8000 & \text{(pommes)}, \\ 75x_1 & + & 200x_2 & \leq & 2500 & \text{(pâte)}, \end{array}$$

Définissons 2 **variables de décision**

x_1 : le nombre de chaussons confectionnés,

x_2 : le nombre de tartes confectionnées.

Le chiffre d'affaires associé à une production (x_1, x_2) est

$$z = 3x_1 + (6 \times 2)x_2 = 3x_1 + 12x_2.$$

Il ne faut pas utiliser plus de ressources que disponibles

$$\begin{array}{rcrcrl} 150x_1 & + & 1000x_2 & \leq & 8000 & \text{(pommes)}, \\ 75x_1 & + & 200x_2 & \leq & 2500 & \text{(pâte)}, \\ & & x_2 & \leq & 6 & \text{(plaques)}. \end{array}$$

Définissons 2 **variables de décision**

x_1 : le nombre de chaussons confectionnés,

x_2 : le nombre de tartes confectionnées.

Le chiffre d'affaires associé à une production (x_1, x_2) est

$$z = 3x_1 + (6 \times 2)x_2 = 3x_1 + 12x_2.$$

Il ne faut pas utiliser plus de ressources que disponibles

$$\begin{array}{rcrcrl} 150x_1 & + & 1000x_2 & \leq & 8000 & \text{(pommes)}, \\ 75x_1 & + & 200x_2 & \leq & 2500 & \text{(pâte)}, \\ & & x_2 & \leq & 6 & \text{(plaques)}. \end{array}$$

On ne peut pas cuisiner des quantitées négatives : $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Problème d'allocation de ressources : modèle

Pour maximiser le chiffre d'affaires de la vente, il faut déterminer les nombres x_1 et x_2 de chaussons et de tartes à cuisiner, solution du problème

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\text{Max} & z = & 3x_1 & + & 12x_2 & & \\
\text{s.c.} & & 150x_1 & + & 1000x_2 & \leq & 8000 \\
& & 75x_1 & + & 200x_2 & \leq & 2500 \\
& & & & x_2 & \leq & 6 \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Problème d'allocation de ressources : modèle

Pour maximiser le chiffre d'affaires de la vente, il faut déterminer les nombres x_1 et x_2 de chaussons et de tartes à cuisiner, solution du problème

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\text{Max} & z = & 3x_1 & + & 12x_2 & & \\
\text{s.c.} & & 150x_1 & + & 1000x_2 & \leq & 8000 \\
 & & 75x_1 & + & 200x_2 & \leq & 2500 \\
 & & & & x_2 & \leq & 6 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

En fait, il faudrait également imposer à x_1 et x_2 de ne prendre que des valeurs entières.

Exemple : problème de recouvrement

Données : Les demandes journalières en chauffeurs dans une entreprise de transport

Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
13	18	21	16	12	25	9

Les chauffeurs travaillent cinq jours d'affilée (et peuvent donc avoir leurs deux jours adjacents de congé n'importe quand dans la semaine).

Objectifs : Déterminer les effectifs formant les sept équipes possibles de chauffeurs de manière à

- couvrir tous les besoins,
- engager un nombre minimum de chauffeurs.

Exemple : problème de recouvrement

Données : Les demandes journalières en chauffeurs dans une entreprise de transport

Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
13	18	21	16	12	25	9

Les chauffeurs travaillent cinq jours d'affilée (et peuvent donc avoir leurs deux jours adjacents de congé n'importe quand dans la semaine).

Objectifs : Déterminer les effectifs formant les sept équipes possibles de chauffeurs de manière à

- couvrir tous les besoins,
- engager un nombre minimum de chauffeurs.

Problème de recouvrement : modélisation

Variables de décision : On associe une variable de décision à chacune des sept équipes possibles

x_1 : nombre de chauffeurs dans l'équipe du lundi (repos le samedi et le dimanche),

x_2 : nombre de chauffeurs dans l'équipe du mardi,

...

x_7 : nombre de chauffeurs dans l'équipe du dimanche.

Fonction objectif : On veut minimiser le nombre total de chauffeurs engagés

$$z = x_1 + \ldots + x_7$$

Problème de recouvrement : modélisation

Variables de décision : On associe une variable de décision à chacune des sept équipes possibles

x_1 : nombre de chauffeurs dans l'équipe du lundi (repos le samedi et le dimanche),

x_2 : nombre de chauffeurs dans l'équipe du mardi,

...

x_7 : nombre de chauffeurs dans l'équipe du dimanche.

Fonction objectif : On veut minimiser le nombre total de chauffeurs engagés

$$z = x_1 + \ldots + x_7$$

Contraintes : Le nombre de chauffeurs présents chaque jour doit être suffisant

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
x_1 & & & & & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 13 & \text{(lundi)} \\
x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 18 & \text{(mardi)} \\
 & & & & & & & & \dots & & & & & & & \\
 & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 9 & \text{(dimanche)}
\end{array}$$

Contraintes de bornes : Le nombre de chauffeurs dans chaque équipe doit non seulement être non négatif mais également entier !

$$x_j \geq 0 \text{ et entier}, \ i = 1, \dots, 7.$$

Contraintes : Le nombre de chauffeurs présents chaque jour doit être suffisant

$$\begin{array}{ccccccccccccccl}
x_1 & & & & & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 13 \quad \text{(lundi)} \\
x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 18 \quad \text{(mardi)} \\
& & & & & & & & \cdots & & & & & & \\
& & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 9 \quad \text{(dimanche)}
\end{array}$$

Contraintes de bornes : Le nombre de chauffeurs dans chaque équipe doit non seulement être non négatif mais également entier !

$$x_j \geq 0 \text{ et entier}, \; i = 1, \ldots, 7.$$

Problème de recouvrement : formulation

$$
\begin{array}{llccccccccccccccl}
\text{Min} & z = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & & & & & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 13 \\
& & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 18 \\
& & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 21 \\
& & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & + & x_7 & \geq & 16 \\
& & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & & & \geq & 12 \\
& & & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & & \geq & 25 \\
& & & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 9 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & , & x_7 & \geq & 0 \quad \text{entiers}
\end{array}
$$

Ce problème n'est pas un PL mais un **programme linéaire en nombres entiers** (PLNE) !

Les hypothèses de la programmation linéaire

1. La linéarité des contraintes et de la fonction objectif.
2. La proportionnalité des gains/coûts et des consommation de ressources.
3. La divisibilité des variables.
4. Le déterminisme des données.

Lors de la modélisation d'un problème réel, l'impact de ces hypothèses sur la validité du modèle mathématique doit être étudié. Cette analyse peut mener à choisir un modèle différent (non linéaire, stochastique, ...) et est essentielle pour la phase d'interprétation des résultats fournis par le modèle.

Pourquoi étudier la programmation linéaire ?

1. Malgré les hypothèses sous-jacentes assez restrictives, de nombreux problèmes peuvent être modélisés par des programmes linéaires. Ces problèmes apparaissent dans des domaines aussi variés que

   - la gestion de production,
   - l'économie,
   - la distributique,
   - les télécommunications,
   - ...

2. Il existe des algorithmes généraux (et des codes les mettant en œuvre) permettant de résoudre efficacement des programmes linéaires (même lorsque le nombre de variables et de contraintes est important).

Interprétation géométrique

- L'ensemble des solutions d'une inéquation (linéaire) correspond à un demi-espace dans $\mathbb{R}^n$ (un demi-plan dans $\mathbb{R}^2$).
- L'ensemble des solutions d'une équation (linéaire) correspond à un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ (une droite dans $\mathbb{R}^2$).
- L'ensemble des solutions d'un système d'équations et d'inéquations (linéaires) correspond à l'intersection des demi-espaces et des hyperplans associés à chaque élément du système.
- Cette intersection, appelée **domaine admissible**, est convexe et définit un polyèdre dans $\mathbb{R}^n$ (une région polygonale dans $\mathbb{R}^2$).

Interprétation géométrique

- L'ensemble des solutions d'une inéquation (linéaire) correspond à un demi-espace dans $\mathbb{R}^n$ (un demi-plan dans $\mathbb{R}^2$).
- L'ensemble des solutions d'une équation (linéaire) correspond à un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ (une droite dans $\mathbb{R}^2$).
- L'ensemble des solutions d'un système d'équations et d'inéquations (linéaires) correspond à l'intersection des demi-espaces et des hyperplans associés à chaque élément du système.
- Cette intersection, appelée **domaine admissible**, est convexe et définit un polyèdre dans $\mathbb{R}^n$ (une région polygonale dans $\mathbb{R}^2$).

Interprétation géométrique

- L'ensemble des solutions d'une inéquation (linéaire) correspond à un demi-espace dans $\mathbb{R}^n$ (un demi-plan dans $\mathbb{R}^2$).
- L'ensemble des solutions d'une équation (linéaire) correspond à un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ (une droite dans $\mathbb{R}^2$).
- L'ensemble des solutions d'un système d'équations et d'inéquations (linéaires) correspond à l'intersection des demi-espaces et des hyperplans associés à chaque élément du système.
- Cette intersection, appelée **domaine admissible**, est convexe et définit un polyèdre dans $\mathbb{R}^n$ (une région polygonale dans $\mathbb{R}^2$).

Interprétation géométrique

- L'ensemble des solutions d'une inéquation (linéaire) correspond à un demi-espace dans $\mathbb{R}^n$ (un demi-plan dans $\mathbb{R}^2$).
- L'ensemble des solutions d'une équation (linéaire) correspond à un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ (une droite dans $\mathbb{R}^2$).
- L'ensemble des solutions d'un système d'équations et d'inéquations (linéaires) correspond à l'intersection des demi-espaces et des hyperplans associés à chaque élément du système.
- Cette intersection, appelée **domaine admissible**, est convexe et définit un polyèdre dans $\mathbb{R}^n$ (une région polygonale dans $\mathbb{R}^2$).

Terminologie

- Une **solution** est une affectation de valeurs aux variables du problème.
- Une solution est **admissible** si elle satisfait toutes les contraintes du problème (y compris les contraintes de bornes).
- La **valeur** d'une solution est la valeur de la fonction objectif en cette solution.
- Le **domaine admissible** D d'un PL est l'ensemble des solutions admissibles du problème.
- La **solution optimale d'un PL** (si elle existe) est formée des valeurs optimales des variables du problème et de la valeur associée de la fonction objectif.

Terminologie

- Une **solution** est une affectation de valeurs aux variables du problème.
- Une solution est **admissible** si elle satisfait toutes les contraintes du problème (y compris les contraintes de bornes).
- La **valeur** d'une solution est la valeur de la fonction objectif en cette solution.
- Le **domaine admissible** D d'un PL est l'ensemble des solutions admissibles du problème.
- La **solution optimale d'un PL** (si elle existe) est formée des valeurs optimales des variables du problème et de la valeur associée de la fonction objectif.

Terminologie

- Une **solution** est une affectation de valeurs aux variables du problème.
- Une solution est **admissible** si elle satisfait toutes les contraintes du problème (y compris les contraintes de bornes).
- La **valeur** d'une solution est la valeur de la fonction objectif en cette solution.
- Le **domaine admissible** D d'un PL est l'ensemble des solutions admissibles du problème.
- La **solution optimale d'un PL** (si elle existe) est formée des valeurs optimales des variables du problème et de la valeur associée de la fonction objectif.

Terminologie

- Une **solution** est une affectation de valeurs aux variables du problème.
- Une solution est **admissible** si elle satisfait toutes les contraintes du problème (y compris les contraintes de bornes).
- La **valeur** d'une solution est la valeur de la fonction objectif en cette solution.
- Le **domaine admissible** D d'un PL est l'ensemble des solutions admissibles du problème.
- La **solution optimale d'un PL** (si elle existe) est formée des valeurs optimales des variables du problème et de la valeur associée de la fonction objectif.

Terminologie

- Une **solution** est une affectation de valeurs aux variables du problème.
- Une solution est **admissible** si elle satisfait toutes les contraintes du problème (y compris les contraintes de bornes).
- La **valeur** d'une solution est la valeur de la fonction objectif en cette solution.
- Le **domaine admissible** D d'un PL est l'ensemble des solutions admissibles du problème.
- La **solution optimale d'un PL** (si elle existe) est formée des valeurs optimales des variables du problème et de la valeur associée de la fonction objectif.

Résolution graphique dans le plan

- Les lignes de niveau de la fonction objectif sont des droites parallèles dans $\mathbb{R}^2$.

- Il existe des solutions admissibles de valeur z si la ligne de niveau associée à cette valeur intersecte le domaine admissible D du problème.

- Pour déterminer la valeur maximale atteignable par une solution admissible, il suffit de faire glisser le plus loin possible une ligne de niveau de la fonction objectif, dans le sens du gradient, jusqu'à ce qu'elle touche encore tout juste D.

- Les points de contact ainsi obtenus correspondent aux solutions optimales du PL.

Résolution graphique dans le plan

- Les lignes de niveau de la fonction objectif sont des droites parallèles dans $\mathbb{R}^2$.
- Il existe des solutions admissibles de valeur z si la ligne de niveau associée à cette valeur intersecte le domaine admissible D du problème.
- Pour déterminer la valeur maximale atteignable par une solution admissible, il suffit de faire glisser le plus loin possible une ligne de niveau de la fonction objectif, dans le sens du gradient, jusqu'à ce qu'elle touche encore tout juste D.
- Les points de contact ainsi obtenus correspondent aux solutions optimales du PL.

Résolution graphique dans le plan

- Les lignes de niveau de la fonction objectif sont des droites parallèles dans $\mathbb{R}^2$.

- Il existe des solutions admissibles de valeur z si la ligne de niveau associée à cette valeur intersecte le domaine admissible D du problème.

- Pour déterminer la valeur maximale atteignable par une solution admissible, il suffit de faire glisser le plus loin possible une ligne de niveau de la fonction objectif, dans le sens du gradient, jusqu'à ce qu'elle touche encore tout juste D.

- Les points de contact ainsi obtenus correspondent aux solutions optimales du PL.

Résolution graphique dans le plan

- Les lignes de niveau de la fonction objectif sont des droites parallèles dans $\mathbb{R}^2$.
- Il existe des solutions admissibles de valeur z si la ligne de niveau associée à cette valeur intersecte le domaine admissible D du problème.
- Pour déterminer la valeur maximale atteignable par une solution admissible, il suffit de faire glisser le plus loin possible une ligne de niveau de la fonction objectif, dans le sens du gradient, jusqu'à ce qu'elle touche encore tout juste D.
- Les points de contact ainsi obtenus correspondent aux solutions optimales du PL.

Résultat d'une optimisation linéaire

Le domaine admissible d'un PL peut être

- vide. Dans un tel cas le problème est **sans solution admissible** (et ne possède évidemment pas de solution optimale).

- borné (et non vide). Le problème possède toujours au moins une solution optimale, quelle que soit la fonction objectif.

- non borné. Selon la fonction objectif choisie,

  - le problème peut posséder des solutions optimales ;
  - il peut exister des solutions admissibles de valeur arbitrairement grande (ou petite). Dans un tel cas le PL n'admet pas de solution optimale finie et est dit **non borné**.

Résultat d'une optimisation linéaire

Le domaine admissible d'un PL peut être

- vide. Dans un tel cas le problème est **sans solution admissible** (et ne possède évidemment pas de solution optimale).
- borné (et non vide). Le problème possède toujours au moins une solution optimale, quelle que soit la fonction objectif.
- non borné. Selon la fonction objectif choisie,
  - le problème peut posséder des solutions optimales ;
  - il peut exister des solutions admissibles de valeur arbitrairement grande (ou petite). Dans un tel cas le PL n'admet pas de solution optimale finie et est dit **non borné**.

Résultat d'une optimisation linéaire

Le domaine admissible d'un PL peut être

- vide. Dans un tel cas le problème est **sans solution admissible** (et ne possède évidemment pas de solution optimale).
- borné (et non vide). Le problème possède toujours au moins une solution optimale, quelle que soit la fonction objectif.
- non borné. Selon la fonction objectif choisie,
  - le problème peut posséder des solutions optimales ;
  - il peut exister des solutions admissibles de valeur arbitrairement grande (ou petite). Dans un tel cas le PL n'admet pas de solution optimale finie et est dit **non borné**.

Résultat d'une optimisation linéaire

Le domaine admissible d'un PL peut être

- vide. Dans un tel cas le problème est **sans solution admissible** (et ne possède évidemment pas de solution optimale).
- borné (et non vide). Le problème possède toujours au moins une solution optimale, quelle que soit la fonction objectif.
- non borné. Selon la fonction objectif choisie,
  - le problème peut posséder des solutions optimales ;
  - il peut exister des solutions admissibles de valeur arbitrairement grande (ou petite). Dans un tel cas le PL n'admet pas de solution optimale finie et est dit **non borné**.

Les différentes formes d'un programme linéaire

- Formes générale, canonique et standard
- Notations matricielles
- Pourquoi des formes particulières ?
- Équivalence des formulations canonique et standard
- Règles de transformation particulières
- Exemple : approximation de Chebychev

Forme générale d'un programme linéaire

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Opt} \quad z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{s.c.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & i \in I \subseteq \{1, \ldots, m\} \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j & \geq & b_k & k \in K \subseteq \{1, \ldots, m\} \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j & = & b_r & r \in R \subseteq \{1, \ldots, m\} \\
& l_j \leq x_j \leq u_j & & & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Opt $=$ Max ou Min, I, K et R disjoints et $I \cup K \cup R = \{1, \ldots, m\}$, $l_j = -\infty$ et $u_j = +\infty$ possibles.

Forme canonique d'un programme linéaire

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Max} \quad z = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{s.c.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & i = 1, \ldots, m \\
& x_j & \geq & 0 & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

- Problème de maximisation
- Toutes les contraintes sont du type "$\leq$"
- Toutes les variables sont non négatives

Forme canonique d'un programme linéaire

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Max} \quad z = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{s.c.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & i = 1, \ldots, m \\
 & x_j & \geq & 0 & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

- Problème de maximisation
- Toutes les contraintes sont du type "$\leq$"
- Toutes les variables sont non négatives

Forme standard d'un programme linéaire

$$
\begin{array}{llrcll}
\text{Max} & z = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{s.c.} & & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} & = & b_i & i = 1, \ldots, m \\
& & x_j & \geq & 0 & j = 1, \ldots, n+m
\end{array}
$$

- Problème de maximisation
- Toutes les contraintes sont des équations
- Toutes les variables sont non négatives
- La formulation exhibe une solution particulière dite basique

Forme standard d'un programme linéaire

$$\begin{array}{llrcll}
\text{Max} & z = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{s.c.} & & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} & = & b_i & i = 1, \ldots, m \\
& & x_j & \geq & 0 & j = 1, \ldots, n+m
\end{array}$$

- Problème de maximisation
- Toutes les contraintes sont des équations
- Toutes les variables sont non négatives
- La formulation exhibe une solution particulière dite basique

Forme standard (suite)

Autre écriture :

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{Max} & \multicolumn{6}{l}{(z,\ \text{s.c. } x_1, \ldots, x_{n+m} \geq 0)} \\
\text{avec} & x_{n+i} & = & b_i & - & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \quad i = 1, \ldots, m \\
\hline
& z & = & & & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &
\end{array}
$$

Forme standard (suite)

Autre écriture :

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{Max} & \multicolumn{6}{l}{(z, \text{ s.c. } x_1, \ldots, x_{n+m} \geq 0)} \\
\text{avec} & x_{n+i} & = & b_i & - & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \quad i = 1, \ldots, m \\
\cline{2-6}
 & z & = & & & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &
\end{array}
$$

- On passe de la forme canonique à la forme standard en ajoutant dans chaque contrainte i une **variable d'écart** x_{n+i}.

Forme standard (suite)

Autre écriture :

$$\begin{array}{lllll} \text{Max} & (z, \text{ s.c. } x_1, \ldots, x_{n+m} \geq 0) & & & \\ \text{avec} & x_{n+i} = b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & & & i = 1, \ldots, m \\ \hline & z = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \end{array}$$

- On passe de la forme canonique à la forme standard en ajoutant dans chaque contrainte i une **variable d'écart** x_{n+i}.
- La solution particulière obtenue en fixant les variables de décision $x_1, \ldots, x_n$ à zéro joue un rôle important (voir solutions basiques).

Notation matricielle : forme canonique

$$
\begin{array}{llrcl}
\text{Max} & z = & \boldsymbol{cx} & & \\
\text{s.c.} & & \boldsymbol{Ax} & \leq & \boldsymbol{b} \\
& & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

Notation matricielle : forme canonique

$$\begin{array}{llrcl} \text{Max} & z = & \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} & & \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array} \qquad \left[\begin{array}{llrcl} \text{Max} & z = & \boldsymbol{c_D}\boldsymbol{x_D} & & \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x_D} & \leq & \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x_D} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array} \right]$$

où

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c_D} = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_D} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Notation matricielle : forme standard

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Max} & z = \quad \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} & & \\
\text{s.c.} & [\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}]\, \boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

Notation matricielle : forme standard

$$\begin{array}{lrcl} \text{Max} & z = \boldsymbol{cx} & & \\ \text{s.c.} & [\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}]\,\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array} \quad \left[\begin{array}{lrcrcl} \text{Max} & z = \boldsymbol{c_D x_D} & + & 0\boldsymbol{x_E} & & \\ \text{s.c.} & \boldsymbol{A x_D} & + & \boldsymbol{I x_E} & = & \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x_D} & , & \boldsymbol{x_E} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array} \right]$$

où

$$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c_D} \mid \boldsymbol{c_E}) = (\boldsymbol{c_D} \mid \boldsymbol{0}) = (c_1 \ \ldots \ c_n \mid 0 \ \ldots \ 0)$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_D} \\ - \\ \boldsymbol{x_E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ - \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Notation matricielle : exemple

Pour le problème d'allocation de ressources

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\text{Max} & z = & 3x_1 & + & 12x_2 & & \\
\text{s.c.} & & 150x_1 & + & 1000x_2 & \leq & 8000 \\
& & 75x_1 & + & 200x_2 & \leq & 2500 \\
& & & & x_2 & \leq & 6 \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Notation matricielle : exemple

Pour le problème d'allocation de ressources

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{Max} \quad z = & 3x_1 & + & 12x_2 & & \\
\text{s.c.} & 150x_1 & + & 1000x_2 & \leq & 8000 \\
 & 75x_1 & + & 200x_2 & \leq & 2500 \\
 & & & x_2 & \leq & 6 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

on a

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 150 & 1000 \\ 75 & 200 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 2500 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Remarques sur les notations

- Les symboles en gras $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}, \mathbf{0}, \ldots)$ sont réservés pour les matrices (majuscules) et les vecteurs (minuscules).

Remarques sur les notations

- Les symboles en gras $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}, \mathbf{0}, \ldots)$ sont réservés pour les matrices (majuscules) et les vecteurs (minuscules).

- Les vecteurs doivent être interprétés comme des vecteurs-colonnes ou des vecteurs-lignes selon le contexte (pas ou peu de signes transposés).

$\boldsymbol{Ax}$: $\boldsymbol{x}$ vecteur-colonne $\qquad$ $\boldsymbol{yA}$: $\boldsymbol{y}$ vecteur-ligne

$\boldsymbol{xy}$: produit scalaire

Remarques sur les notations

- Les symboles en gras $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}, \mathbf{0}, \ldots)$ sont réservés pour les matrices (majuscules) et les vecteurs (minuscules).

- Les vecteurs doivent être interprétés comme des vecteurs-colonnes ou des vecteurs-lignes selon le contexte (pas ou peu de signes transposés).

  $\boldsymbol{Ax}$: $\boldsymbol{x}$ vecteur-colonne $\qquad$ $\boldsymbol{yA}$: $\boldsymbol{y}$ vecteur-ligne

  $\boldsymbol{xy}$: produit scalaire

- Les inégalités entre vecteurs (matrices) doivent être comprises composantes par composantes :

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \iff x_1 \geq 0, \ \ldots, \ x_n \geq 0$$

  Mais $\boldsymbol{x} \not\geq \mathbf{0} \iff \exists\, i \text{ t.q. } x_i < 0.$

Pourquoi des formes particulières ?

- Vérifier les hypothèses des méthodes de résolution.
  - La méthode du simplexe et ses variantes supposent des problèmes sous forme standard.
  - Les méthodes de points intérieurs supposent des problèmes sous forme canonique.
- Simplifier la présentation des algorithmes.

Pourquoi des formes particulières ?

- Vérifier les hypothèses des méthodes de résolution.
  - ▶ La méthode du simplexe et ses variantes supposent des problèmes sous forme standard.
  - ▶ Les méthodes de points intérieurs supposent des problèmes sous forme canonique.
- Simplifier la présentation des algorithmes.

Les définitions des formes canonique et standard varient parfois d'un auteur à l'autre !

Équivalence des formulations canonique et standard

Théorème 1. *Au prix éventuel de l'ajout de contraintes et/ou de variables, tout PL peut être transformé en un PL sous forme canonique équivalent.*

Théorème 2. *Au prix éventuel de l'ajout de contraintes et/ou de variables, tout PL peut être transformé en un PL sous forme standard équivalent.*

Équivalence des formulations canonique et standard

Théorème 1. *Au prix éventuel de l'ajout de contraintes et/ou de variables, tout PL peut être transformé en un PL sous forme canonique équivalent.*

Théorème 2. *Au prix éventuel de l'ajout de contraintes et/ou de variables, tout PL peut être transformé en un PL sous forme standard équivalent.*

Par programme équivalent, on entend :

- toute solution admissible (optimale) du problème équivalent correspond à une solution admissible (optimale) du problème initial ;
- toute solution admissible (optimale) du problème initial correspond à au moins une solution admissible (optimale) du problème équivalent ;
- l'issue de l'optimisation des deux problèmes est la même (sans solution admissible, optimum fini, problème non borné).

Règles de transformation

- Minimisation $\leftrightarrow$ maximisation : $\min f(\boldsymbol{x}) = -\max\left(-f(\boldsymbol{x})\right)$

  Pour minimiser $z = \boldsymbol{cx}$, il suffit de maximiser $w = -\boldsymbol{cx} = (-\boldsymbol{c})\boldsymbol{x}$ et de multiplier la valeur optimale de w par -1 pour obtenir celle de z.

- Inéquation "$\geq$" $\leftrightarrow$ inéquation "$\leq$" :

$$\boldsymbol{ax} \geq b \iff (-\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} \leq -b$$

- Équation $\rightarrow$ inéquation "$\leq$" :

$$\boldsymbol{ax} = b \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{ax} & \leq & b \\ \boldsymbol{ax} & \geq & b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} \boldsymbol{ax} & \leq & b \\ (-\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} & \leq & -b \end{array} \right.$$

Règles de transformation

- Minimisation $\leftrightarrow$ maximisation : $\min f(\boldsymbol{x}) = -\max\left(-f(\boldsymbol{x})\right)$

  Pour minimiser $z = \boldsymbol{cx}$, il suffit de maximiser $w = -\boldsymbol{cx} = (-\boldsymbol{c})\boldsymbol{x}$ et de multiplier la valeur optimale de w par -1 pour obtenir celle de z.

- Inéquation "$\geq$" $\leftrightarrow$ inéquation "$\leq$" :

$$\boldsymbol{ax} \geq b \iff (-\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} \leq -b$$

- Équation $\rightarrow$ inéquation "$\leq$" :

$$\boldsymbol{ax} = b \iff \left\{\begin{array}{ccc} \boldsymbol{ax} & \leq & b \\ \boldsymbol{ax} & \geq & b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} \boldsymbol{ax} & \leq & b \\ (-\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} & \leq & -b \end{array}\right.$$

Règles de transformation

- Minimisation $\leftrightarrow$ maximisation : $\min f(\boldsymbol{x}) = -\max(-f(\boldsymbol{x}))$

  Pour minimiser $z = \boldsymbol{cx}$, il suffit de maximiser $w = -\boldsymbol{cx} = (-\boldsymbol{c})\boldsymbol{x}$ et de multiplier la valeur optimale de w par -1 pour obtenir celle de z.

- Inéquation "$\geq$" $\leftrightarrow$ inéquation "$\leq$" :

$$\boldsymbol{ax} \geq b \iff (-\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} \leq -b$$

- Équation $\rightarrow$ inéquation "$\leq$" :

$$\boldsymbol{ax} = b \iff \begin{cases} \boldsymbol{ax} & \leq & b \\ \boldsymbol{ax} & \geq & b \end{cases} \iff \begin{cases} \boldsymbol{ax} & \leq & b \\ (-\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} & \leq & -b \end{cases}$$

Règles de transformation (suite)

- Inéquation $\longrightarrow$ équation : On ajoute une variable d'écart (de surplus)

$$\boldsymbol{ax} \leq b \iff \boldsymbol{ax} + s = b, s \geq 0$$

$$\boldsymbol{ax} \geq b \iff \boldsymbol{ax} - s = b, s \geq 0$$

- Variable libre (réelle) $\longrightarrow$ variable non négative : Tout nombre réel peut être écrit comme la différence de deux nombres non négatifs.

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$$

- ...

Règles de transformation (suite)

- Inéquation $\rightarrow$ équation : On ajoute une variable d'écart (de surplus)

$$\boldsymbol{ax} \leq b \iff \boldsymbol{ax} + s = b, s \geq 0$$

$$\boldsymbol{ax} \geq b \iff \boldsymbol{ax} - s = b, s \geq 0$$

- Variable libre (réelle) $\rightarrow$ variable non négative : Tout nombre réel peut être écrit comme la différence de deux nombres non négatifs.

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$$

- ...

Règles de transformation (suite)

- Inéquation $\to$ équation : On ajoute une variable d'écart (de surplus)

$$\boldsymbol{ax} \leq b \iff \boldsymbol{ax} + s = b, s \geq 0$$

$$\boldsymbol{ax} \geq b \iff \boldsymbol{ax} - s = b, s \geq 0$$

- Variable libre (réelle) $\to$ variable non négative : Tout nombre réel peut être écrit comme la différence de deux nombres non négatifs.

$$x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$$

- ...

Exemple de mise sous forme canonique

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\text{Min} & z = & -3x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & x_2 & = & 6 \\
& & x_1 & - & 2x_2 & \geq & 4 \\
& & x_1 & & & \in & \mathbb{R} \\
& & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

PL initial

Modifications

$$\text{Min } z = -3x_1 + 4x_2 \quad \rightarrow \quad \text{Max } w = 3x_1 - 4x_2$$

$$x_1 + x_2 = 6 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 & \leq \quad 6 \\ -x_1 - x_2 & \leq \; -6 \end{cases}$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 4 \quad \rightarrow \quad -x_1 + 2x_2 \leq -4$$

$$x_1 \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_1^+ - x_1^- \\ x_1^+, x_1^- \geq 0 \end{cases}$$

PL initial

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\text{Min} & z = & -3x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & x_2 & = & 6 \\
& & x_1 & - & 2x_2 & \geq & 4 \\
& & x_1 & & & \in & \mathbb{R} \\
& & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

PL canonique équivalent

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{Max} & w = & 3x_1^+ & - & 3x_1^- & - & 4x_2 & & \\
\text{s.c.} & & x_1^+ & - & x_1^- & + & x_2 & \leq & 6 \\
& & -x_1^+ & + & x_1^- & - & x_2 & \leq & -6 \\
& & -x_1^+ & + & x_1^- & + & 2x_2 & \leq & -4 \\
& & x_1^+ & , & x_1^- & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Ne pas oublier que $z_{opt} = -w_{opt}$! !

Règles de transformation particulières

- Problème Min-Max ou Max-Min :

$$
\text{Min} \quad z = \max\{\boldsymbol{c_1 x}, \ldots, \boldsymbol{c_k x}\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad
\begin{array}{lrcl}
\text{Min} & z = t & & \\
\text{s.c.} & t & \geq & \boldsymbol{c_1 x} \\
 & & \ldots & \\
 & t & \geq & \boldsymbol{c_k x} \\
 & t & \in & \mathbb{R}
\end{array}
$$

Règles de transformation particulières

- Problème Min-Max ou Max-Min :

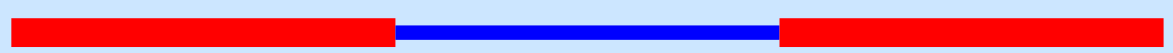
$$\text{Min} \quad z = \max\{\boldsymbol{c_1 x}, \ldots, \boldsymbol{c_k x}\} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{llll} \text{Min} & z = & t & \\ \text{s.c.} & & t & \geq & \boldsymbol{c_1 x} \\ & & & \ldots & \\ & & t & \geq & \boldsymbol{c_k x} \\ & & t & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

- Valeurs absolues : $|x| \leq b \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x & \leq & b \\ x & \geq & -b \end{array} \right.$

$|x| \leq b$

Convexe

$|x| \geq b$



Non convexe

Règles de transformation particulières

- Problème Min-Max ou Max-Min :

$$\text{Min} \quad z = \max\{\boldsymbol{c_1 x}, \ldots, \boldsymbol{c_k x}\} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lrcl} \text{Min} & z = & t & \\ \text{s.c.} & t & \geq & \boldsymbol{c_1 x} \\ & & \ldots & \\ & t & \geq & \boldsymbol{c_k x} \\ & t & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

- Valeurs absolues : $|x| \leq b \iff \left\{ \begin{array}{rcr} x & \leq & b \\ x & \geq & -b \end{array} \right.$

$|x| \leq b$

Convexe

$|x| \geq b$

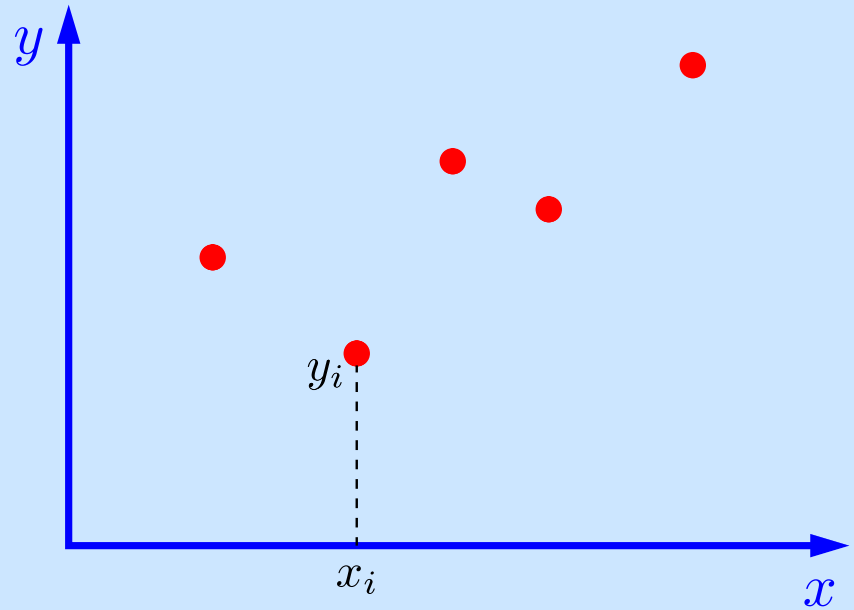
Non linéaire

Non convexe

Exemple : approximation de Chebychev

Données : m mesures

$$(\boldsymbol{x}_i, y_i) \in \mathbb{R}^{n+1}, i = 1, \ldots, m$$

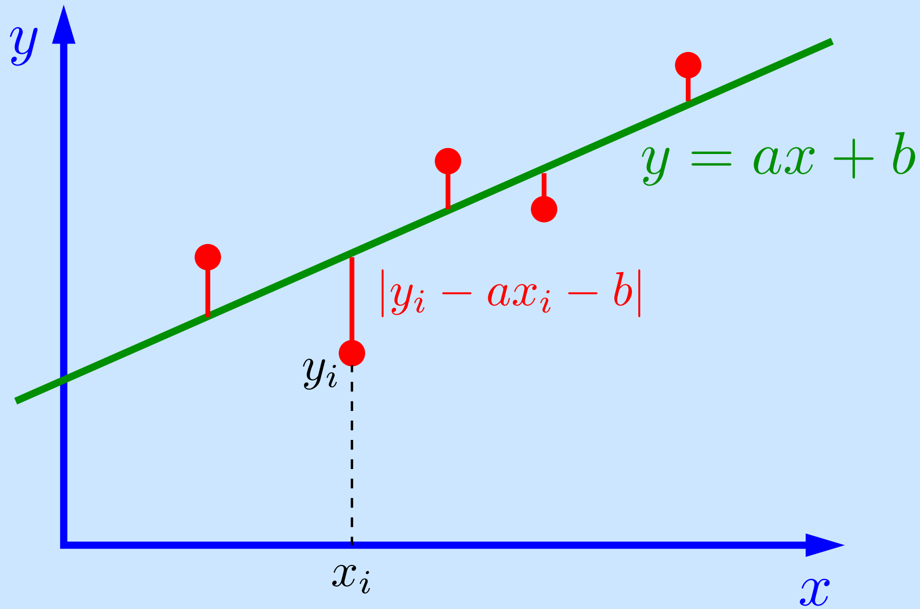


Exemple : approximation de Chebychev

Données : m mesures

$$(\boldsymbol{x}_i, y_i) \in \mathbb{R}^{n+1}, i = 1, \ldots, m$$

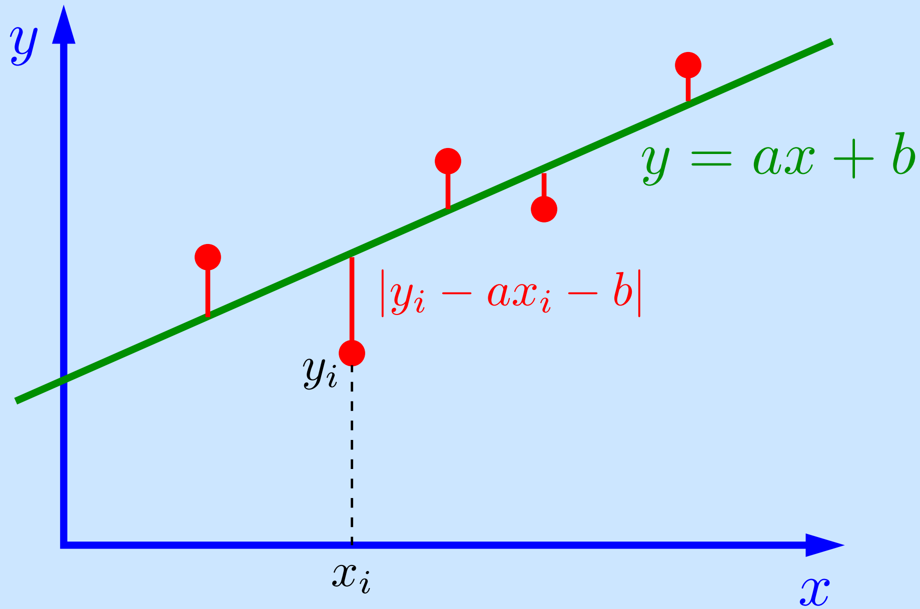
Objectif : Déterminer une approximation linéaire $y = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} + b$ minimisant la plus grand erreur d'estimation.



Exemple : approximation de Chebychev

Données : m mesures

$$(\boldsymbol{x}_i, y_i) \in \mathbb{R}^{n+1}, i = 1, \ldots, m$$



Objectif : Déterminer une approximation linéaire $y = \boldsymbol{ax} + b$ minimisant la plus grand erreur d'estimation.

Formulation :

$$\text{Min } z = \max_{i=1,\ldots,m} \left\{ \, |y_i - \boldsymbol{ax}_i - b| \, \right\}$$

Les variables de décision de ce problème sont $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$!

On peut récrire le problème comme

$$\begin{array}{lrcl} \text{Min} & z = & \displaystyle\max_{i=1,\dots,m} \{\Delta_i\} & \\ \text{s.c.} & \Delta_i & = & |y_i - \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i - b| \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{lrcl} \text{Min} & z = & t & \\ \text{s.c.} & t & \geq & |y_i - \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i - b| \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

pour finalement obtenir une formulation linéaire

$$\begin{array}{lrcl} \text{Min} & z = & t & \\ \text{s.c.} & t & \geq & y_i - \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i - b \quad i = 1, \dots, m \\ & t & \geq & -y_i + \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i + b \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

avec $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$.

On peut récrire le problème comme

$$\begin{array}{lrcl} \text{Min} & z = & \max\limits_{i=1,\ldots,m} \{\Delta_i\} & \\ \text{s.c.} & \Delta_i & = & |y_i - \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i - b| \quad i = 1,\ldots,m \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{lrcl} \text{Min} & z = & t & \\ \text{s.c.} & t & \geq & |y_i - \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i - b| \quad i = 1,\ldots,m \end{array}$$

pour finalement obtenir une formulation linéaire

$$\begin{array}{lrcl} \text{Min} & z = & t & \\ \text{s.c.} & t & \geq & y_i - \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i - b \quad i = 1,\ldots,m \\ & t & \geq & -y_i + \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i + b \quad i = 1,\ldots,m \end{array}$$

avec $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$.

On peut récrire le problème comme

$$\begin{array}{lrcl} \text{Min} & z = & \max\limits_{i=1,\ldots,m} \{\Delta_i\} & \\ \text{s.c.} & \Delta_i = & |y_i - \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i - b| & i = 1,\ldots,m \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{lrcl} \text{Min} & z = & t & \\ \text{s.c.} & t \geq & |y_i - \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i - b| & i = 1,\ldots,m \end{array}$$

pour finalement obtenir une formulation linéaire

$$\begin{array}{lrrl} \text{Min} & z = & t & \\ \text{s.c.} & t \geq & y_i - \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i - b & i = 1,\ldots,m \\ & t \geq & -y_i + \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i + b & i = 1,\ldots,m \end{array}$$

avec $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$.

Objectifs

- Connaître les différents éléments d'un PL : variables de décision, d'écart, fonction objectif, contraintes, contraintes de bornes.
- Être capable de modéliser de petits problèmes : identifier les variables de décision, écrire la fonction objectif et les contraintes, discuter les hypothèses de la PL.
- Être capable de résoudre graphiquement un PL à 2 ou 3 variables de décision : déterminer le domaine admissible et les lignes (surfaces) de niveau de la fonction objectif, identifier la solution optimale.
- Connaître les formes canonique et standard et être capable de mettre un PL sous l'une ou l'autre de ces deux formes.